Concours de recrutement de professeur des écoles, Avril 2016
Corrigé non officiel de l'épreuve de mathématiques
Groupement académique 3

Les parties en italique sont des compléments qui n'étaient pas attendus des candidats.

Première partie (13 points)

Partie A—Questions préliminaires

1. Le triangle ABC est rectangle en A, on a donc $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$.

Il en résulte que BC = 10 cm.

2. Dans le triangle ABC, rectangle en A, on a $\tan\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{6}{8}$ donc $\widehat{ABC} \approx 37°$

3. Le quadrilatère ADEF a trois angles droits, c'est donc un rectangle. Par conséquent ses diagonales [AE] et [DF] ont la même longueur.

Partie B—Étude analytique du problème.

1. Cas particulier

   a. D étant sur [AB], BD = AB - AD ainsi, si AD = 3 cm, BD = 5 cm.

   BD et A sont alignés, BE et C également et (AC) et parallèle à (DE). On peut donc appliquer le théorème de Thales aux triangles BAC et BDE, ce qui permet de conclure que $\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{DE}{AC}$ d'où on tire $DE = \dfrac{BD \times AC}{BA} = \dfrac{5 \times 6}{8} = 3{,}75$ cm.

   b. Le triangle ADF est rectangle en A donc
   $DF^2 = AD^2 + AF^2 = AD^2 + DE^2 = 3^2 + 3{,}75^2 = 9 + 14{,}0625 = 23{,}0625$

   Il en résulte que $DF = \sqrt{23{,}0625}$.

2. Cas général

   a. D étant sur [AB], le nombre x, mesure en cm du segment [AD], peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et 8.

   b. Pour les raisons exposées à la question 1.a., on a $DE = \dfrac{BD \times AC}{BA}$ d'où :

   $$DE = \frac{(8-x)\times 6}{8} = \frac{8\times 6}{8} - \frac{6x}{8} = 6 - 0{,}75x$$

   c. Pour les mêmes raisons qu'à la question 1.b. :
   $$DF^2 = AD^2 + AF^2 = x^2 + (6 - 0{,}75x)^2 = x^2 + 36 - 9x + 0{,}5625x^2 = 1{,}5625x^2 - 9x + 36$$

   d. Si dans l'expression de la question précédente on donne à x la valeur 3, on obtient :

$$DF^2 = 1{,}5625 \times 9 - 9 \times 3 + 36 = 14{,}0625 - 27 + 36 = 23{,}0625$$

On a alors $DF = \sqrt{23{,}0625}$.

3. Recherche de la valeur de x pour laquelle DF est minimale.

   a. Seule la proposition 2 convient.

   b. Le tableur semble montrer que DF^2 décroit jusqu'à une certaine valeur de x et croit ensuite *(on peut également savoir que c'est bien le cas puisque DF^2 s'exprime comme une fonction du second degré en x, le coefficient du terme de second degré étant positif).*

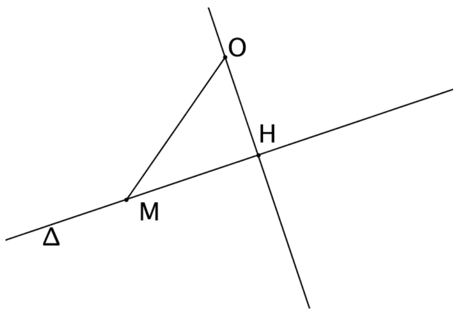
   En admettant que c'est bien ce qui se passe, le tableur montre que le minimum est atteint pour une valeur de *x* comprise entre 2,5 et 3,5 ce qui justifie d'étudier de façon plus détaillée cet intervalle.

   c. La valeur de x pour laquelle DF^2 est minimal est comprise entre 2,87 et 2,89

Partie C—Résolution du problème par une méthode géométrique

1. OH < OM parce que la plus courte distance d'un point à une droite est obtenue en suivant la perpendiculaire à cette droite passant par ce point.

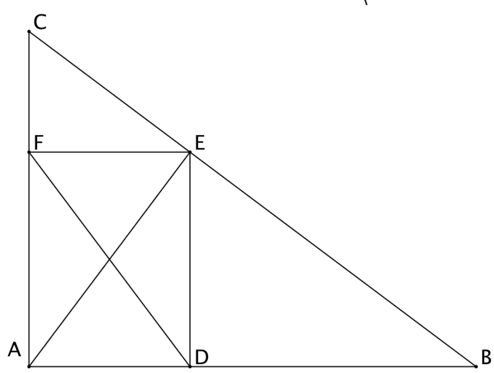
Autre argument possible : le triangle OMH étant rectangle en H, son hypoténuse est plus longue que les côtés de l'angle droit.



2.

   a. Conformément à la question précédente, il faut placer le point E à l'intersection de (BC) et de la perpendiculaire à (BC) passant par A.

L'énoncé n'imposant pas de méthode de construction, celle-ci peut être faite à l'équerre. Le schéma ci-contre n'est pas aux dimensions demandées.



   b. L'aire du triangle rectangle ABC peut se calculer en utilisant les côtés de l'angle droit, elle est égale à $\frac{6 \times 8}{2}$ soit 24 cm^2

   Elle peut aussi se calculer à l'aide du côté [BC] et de la hauteur [AE] relative à ce côté. Elle s'exprime alors ainsi : $\frac{AE \times BC}{2}$ soit $5AE$. On a donc $5AE = 24$ donc $AE = 4{,}8$ cm.

Comme AE = DF, la valeur minimale de DF, correspondant à la configuration construite en 2.a, est donc de 4,8 cm.

c. Les triangles rectangles AEB et ADE ont le même angle de sommet A, par conséquent en exprimant le cosinus de cet angle à l'aide de chacun des deux triangles on obtient deux nombres égaux : $\frac{AD}{AE} = \frac{AE}{AB}$ d'où $AD = \frac{AE \times AE}{AB} = \frac{4,8 \times 4,8}{8} = 2,88$

Pour que DF soit minimale, il faut donc placer D à 2,88 cm du point A.

On pouvait également utiliser la mesure d'angle calculée en A.2. mais comme on ne dispose que d'une valeur approchée de cette mesure on ne peut en déduire qu'une approximation de la longueur AD.

Deuxième partie (13 points)

Exercice 1

1. En une seconde, la lumière parcourt 300 000 000 m soit 300 000 km.

En 5 secondes, elle parcourt donc 1 500 000 km et en 500 secondes 100 fois plus c'est à dire 150 000 000 km.

Le temps nécessaire à un signal lumineux pour aller du Soleil à la Terre est donc de 500 secondes soit 8 minutes et 20 secondes.

2. En une seconde, la lumière parcourt 300 000 000 m soit 300 000 km.

En une année de 365,25 jours elle parcourt donc un nombre de km égal à

$300\,000 \times 3600 \times 24 \times 365,25$ soit environ $9,5 \times 10^{12}$ km *(ou neuf mille cinq cents milliards de kilomètres).*

3.

a. 1 UA = 150 000 000 km donc 3 UA = 450 000 000 km et 30 UA = 4 500 000 000 km.

La distance moyenne du Soleil à Neptune est de 30 UA.

b. La réponse à la question précédente revient à dire que Neptune est 30 fois plus éloigné du Soleil que la Terre. La distance Soleil-Terre sur la maquette doit donc être de 1 000 mm : 30 soit environ 33 mm.

Exercice 2

L'affirmation 1 est vraie en effet 1215 g - 840 g = 375 g ce qui indique que la masse de la moitié de l'eau est de 375 g. La masse de la bouteille vide est alors de 840 g - 375 g soit 465 g.

L'affirmation 2 est vraie. En effet 5 élèves sont partis en vacances à la montagne seulement l'hiver (10 -5) et 3 élèves seulement l'été (8-5). En tout 13 élèves sont donc partis à la montagne (5 + 5 + 3) il y en a donc bien 12 qui ne sont pas partis à la montagne (25 - 13).

L'affirmation 3 est fausse. En effet quand *x* vaut 1 la fonction *f* vaut -2 alors que la fonction représentée par le graphique semble avoir pour valeur 4. *(Bien que l'usage soit de représenter x sur l'axe horizontal et f(x) sur l'axe vertical, on aurait aimé que ce soit explicité).*

L'affirmation 4 est fausse. En effet la somme des chiffres de chacun des nombres proposés est 9. Le nombre 9 est donc un diviseur commun à ces deux nombres, le plus grand de leurs diviseurs communs ne peut donc pas être 2.

Exercice 3

1.

a. Si le nombre de départ est 2, on obtient successivement :

$2\times 4=8$ $\quad$ $8+7=15$ $\quad$ $15^2=225$ $\quad$ Le résultat affiché est bien 225.

b. Si le nombre de départ est 1/2, on obtient successivement :

$\frac{1}{2}\times 4=2$ $\quad$ $2+7=9$ $\quad$ $9^2=81$ $\quad$ Le nombre obtenu est 81

2. Si on note a le nombre de départ, on calcule successivement *4a, 4a+7* et $(4a+7)^2$

Or $(4a+7)^2=16a^2+56a+49$, le nombre obtenu est donc bien $16a^2+56a+49$

3.

a. Le nombre obtenu étant égal à $(4a+7)^2$ il est égal à 0 si et seulement si $4a+7=0$ c'est à dire si $a=-\frac{7}{4}$

b. Le nombre étant égal à $16a^2+56a+49$, il est égal à 49 si et seulement si $16a^2+56a=0$ c'est à dire si $a(16a+56)=0$.

Un produit est nul quand l'un de ses facteurs est nul, il y a donc deux solutions, l'une est *a*=0, l'autre est obtenue quand $16a+56=0$ c'est à dire quand $a=-\frac{56}{16}=-\frac{7}{2}$

On pouvait aussi raisonner à partir de l'expression sous forme d'un carré. Pour $(4a+7)^2=49$ *il faut et il suffit que* $(4a+7)$ *prenne une des deux valeurs suivantes : 7 ou -7*

Troisième partie (14 points)

Situation 1

1. Pour déterminer la longueur du contour il faut :

- Savoir mesurer la longueur de chacun des côtés.
- Savoir s'organiser pour prendre en compte chaque côté une fois et une seule.
- Savoir calculer la somme des longueurs mesurées.

Un élève possédant ces quatre compétences peut réussir la tâche, il n'y a donc pas de quatrième compétence nécessaire malgré la formulation de la question. Selon les dimensions du gabarit et selon la façon dont les élèves prennent les mesures, il se peut que la troisième compétence soit à préciser et qu'on doive décrire des sous compétences comme « convertir des longueurs de mm en cm » ou « effectuer la somme de nombre décimaux ».

2. L'exercice de chacune des compétences décrites à la questions précédente peut donner lieu à des difficultés un élève peut par exemple :

- avoir du mal à effectuer les mesures de longueur parce que l'objet est petit et mobile ce qui rend l'usage de la règle graduée difficile.
- avoir du mal à calculer la somme de longueurs exprimées en cm et mm.

3. a.

Corentin semble avoir dessiné sur une feuille de papier quadrillé 5x5 en utilisant son gabarit puis mesuré sur sa figure. Les mesures effectuées sont assez précises.

Il calcule ensuite la longueur totale en calculant séparément le nombre de cm et le nombre de mm.

Une erreur se produit dans le report des longueurs mesurées : 2 cm 5 mm écrit à l'envers sur la figure devient 5 cm 2 mm dans le calcul de la somme. Le calcul du nombre total de mm est correct, mais une erreur se produit dans le calcul du nombre de cm : Corentin trouve 31 cm au lieu de 29.

Corentin ne pense pas à remplacer 13 mm par 1 cm 3 mm pour retrouver l'écriture habituelle en cm et mm, avec un nombre de mm inférieur à 10.

Nous faisons une hypothèse sur l'écriture 24 cm 21 mm figurant en dessous du premier résultat : il se peut que Corentin ait remarqué l'inversion (5cm 2mm pour 2cm 5mm) et ait tenté de la corriger sans refaire tous les calculs. Il a pour cela soustrait 7 cm, soit 5+2 alors qu'il aurait fallu en soustraire 3 (5-2) et a ajouté 7 mm en commettant une autre erreur puiqu'il trouve 21 mm alors qu'il devrait en trouver 20 si notre hypothèse est correcte.

César fait un schéma à main levée sur lequel il reporte les mesures effectuées sur le gabarit. Ce schéma lui permet de prendre en compte chaque côté une fois et une seule. Les mesures de César sont assez précises et effectuées en cm, en utilisant l'écriture à virgule des nombres décimaux.

Il pose ensuite l'addition en colonne de ses 8 nombres décimaux. Le résultat obtenu est erroné (il devrait trouver 26,5 cm) . Il y a une erreur au rang des dixièmes et également une au rang des unités mais nous ne parvenons pas à analyser de façon plus détaillée ces erreurs.

Le résultat est recopié sous la figure sans la virgule, nous faisons l'hypothèse compte-tenu de l'usage correct de la virgule dans les mesures qu'il s'agit d'une étourderie sans signification particulière.

Clarisse a dessiné sur sa feuille le contour de son gabarit et effectué les mesures sur son dessin.

Ses mesures sont assez précises. Elles sont exprimées directement en mm, ce qui témoigne d'une bonne maîtrise de l'équivalence entre 1 cm et 10 mm puisque sa règle est très probablement graduée en mm.

Elle calcule la somme à l'aide de sommes partielles, en ajoutant une seule longueur à la fois.

Son calcul est exact et elle donne le résultat sous deux formes, 276 mm puis 27,6 cm, ce qui témoigne d'une compréhension de l'écriture à virgule des nombres décimaux.

La question b. est surprenante puisqu'il faut la mention « pour chacun des travaux » semble s'y appliquer alors qu'on ne pose la question de la remédiation que pour deux élèves (ce qui est heureux puisque Clarisse n'a pas commis d'erreur). Par ailleurs la formulation de la question semble indiquer qu'il faut une remédiation commune à César et Corentin alors que leurs erreurs nous semblent de natures très différentes.

b. Corentin n'utilise pas l'équivalence entre 10 mm et 1 cm. Un travail de remédiation pourrait porter sur ce point : quand il y a plus de 10 mm, l'usage est de remplacer les dizaines de mm par des cm.

Les erreurs dans l'addition de César semblent plus liées aux valeurs numériques qu'à l'écriture des nombres décimaux. Il faudrait s'assurer que les tables d'additions sont bien connues et si nécessaire les consolider. On peut aussi envisager de travailler sur le fait qu'une somme d'un nombre important de nombres se vérifie plus facilement en la décomposant en plusieurs sommes.

On remarquera que les mesures obtenues par César rendent l'addition plus difficiles que celles des deux autres élèves, rien n'assure qu'avec les même nombres (beaucoup de chiffres 9) les autres élèves ne se seraient pas trompés également.

Situation 2

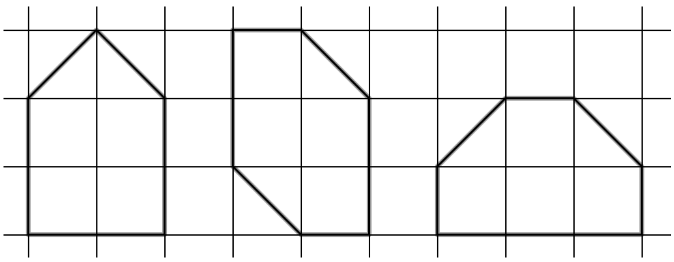
1. pour construire les figures demandées, il faut entre autres choses :

- savoir ce que signifie « périmètre » : c'est la longueur du trait qui fait le tour de la figure.
- savoir ce qu'est « l'aire ». Comme on travaille sur papier quadrillé, il suffit de penser que l'aire de la figure est le nombre de carreaux contenus à l'intérieur de cette figure.
- savoir que l'aire d'une figure ne change pas si on la découpe en morceaux et qu'on déplace les morceaux.
- être capable d'exprimer le périmètre de la figure A sous une forme voisine de « 6 côtés de carreaux et deux diagonales ». En effet une mesure du périmètre en cm ne donne aucune piste sur la façon de construire les figures demandées.

Remarques :

En réalité on définit dans notre deuxième proposition la mesure de l'aire (l'unité étant le carreau) et non l'aire, mais la confusion entre une grandeur et sa mesure est fréquente dans le langage courant et ne porte le plus souvent pas à conséquence : on dit souvent que la longueur d'un segment est de 5 cm au lieu de dire que la mesure de sa longueur est de 5 cm.

Les compétences citées ci-dessus permettent si des figures sont proposées, de juger si elles sont correctes ou non. Elles sont nécessaires pour résoudre le problème mais sont loin d'être suffisantes. Il s'agit d'un problème donné dans une compétition mathématique, probablement par équipe ce qui est souvent le cas des rallyes, et donc difficile. Il n'est pas certain qu'un fort pourcentage d'adultes à qui on poserait ce problème trouvent les trois figures attendues.



2. Si le papier était pointé et non quadrillé, les points risqueraient de ne plus être visibles une fois la figure tracée ce qui rendrait difficile la vérification du périmètre et de l'aire… à moins de tracer le quadrillage.

3.

   a. Le professeur demande à Axel de trouver une autre figure parce que deux des figures proposées par Axel sont superposables.

Remarque : le problème est issu d'un rallye mais la séance décrite n'est pas une séance de rallye sinon le professeur serait pas supposé intervenir.

Le tracé incomplet d'Axel comporte déjà quatre côtés de carreaux et deux diagonales. Peut-être a-t-il remarqué qu'il ne lui restait plus que deux côté de carreaux à utiliser et qu'il était impossible de fermer la figure, ce qui l'aurait conduit à renoncer.

b. À l'exception de la figure située en haut et à gauche de sa feuille, Jean ne parvient pas à coordonner les deux critères : il trace des figures ayant le même périmètre que A à gauche, et des figures ayant la même aire que B à droite. Le fait qu'il écrive A dans certaines figures et B dans les autres confirme que Jean ne prend en compte qu'un critère à la fois. La figure correcte ne l'est donc peut-être que par hasard.

Remarque : on demande une analyse en lien avec les objectifs de l'exercice, mais on ne sait pas si l'auteur désigne par « objectif » le but que l'élève cherche à atteindre (trouver les figures) ou les objectifs pédagogiques de l'enseignant (les connaissances ou les compétences qu'il veut développer chez ses élèves).

c. Timeo semble dessiner des figures obtenues en découpant mentalement la figure B et en replaçant les morceaux dans une autre position, Ce qui revient à dire qu'il tient compte correctement du critère portant sur l'aire. Un des carreaux a été découpé en deux triangles peut-être pour obtenir une certaine ressemblance avec la figure A. Timeo ne semble pas tenir compte du périmètre. Il se peut comme pour Jean que la figure correcte ne le soit que par hasard.

d. Le maître pourrait rappeler que les deux critères doivent êtres remplis simultanément pour chaque figure. Il peut aussi proposer pour chaque figure dessinée de déterminer son aire (en carreaux) et son périmètre (en nombre de côtés de carreaux et nombre de diagonales).