Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2006 du sujet de Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes, La Réunion

Denis Vekemans *

Exercice 1

1. L'application du théorème de Pythagore au triangle ABC rectangle en A, donne
$$AC^2 + AB^2 = BC^2.$$
Il s'ensuit que
$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{12,5^2 - 3,5^2} cm = \sqrt{144} cm = 12 cm.$$

2. Résolution du système linéaire :
$$\left\{\begin{array}{l} a+b=36 \ \ (L_1) \\ a-b=4 \ \ (L_2) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\times a=40 \ \ (L_1'=L_1+L_2) \\ 2\times b=32 \ \ (L_2'=L_1-L_2) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=20 \ \ (L_1''=L_1'/2) \\ b=16 \ \ (L_2''=L_2'/2) \end{array}\right.$$
Calcul de $a^2 - b^2$ puis de $\sqrt{a^2 - b^2}$.
$a^2 - b^2 = (a - b) \times (a + b) = 4 \times 36 = 144$.
$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{144} = 12$.
L'application du théorème de Pythagore au triangle ABC rectangle en A, donne
$$AC^2 + AB^2 = BC^2.$$
En nommant $a = BC$ et $b = AC$, sachant que $AB = 12cm$, on est ramené à chercher a et b entiers tels que $a^2 - b^2 = 144cm^2$. D'après ce que nous venons de voir, les valeurs $a = 20cm$ et $b = 16cm$ conviennent.

3. ✓ La décomposition en produit de facteurs premiers de 144 nous permettra de déduire la liste des diviseurs de 144.
Ainsi, $144 = 12 \times 12 = 2 \times 6 \times 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^2$.

*Université du Littoral Côte d'Opale ; Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Les diviseurs sont donc : 1, 2, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, 3, $3 \times 2 = 6$, $3 \times 2^2 = 12$, $3 \times 2^3 = 24$, $3 \times 2^4 = 48$, $3^2 = 9$, $3^2 \times 2 = 18$, $3^2 \times 2^2 = 36$, $3^2 \times 2^3 = 72$, $3^2 \times 2^4 = 144$.

Ensuite, il suffit de marier correctement les diviseurs de 144 pour obtenir toutes les écritures multiplicatives de 144 :

$$\begin{aligned}
144 &= 1 \times 144\\
&= 2 \times 72\\
&= 3 \times 48\\
&= 4 \times 36\\
&= 6 \times 24\\
&= 8 \times 18\\
&= 9 \times 16\\
&= 12 \times 12\\
&= 16 \times 9\\
&= 18 \times 8\\
&= 24 \times 6\\
&= 36 \times 4\\
&= 48 \times 3\\
&= 72 \times 2\\
&= 144 \times 1
\end{aligned}$$

Ces 15 décompositions peuvent être ramenées à 8 en considérant que l'écriture $a \times b$ est identique à l'écriture $b \times a$.

✓ $a^2 - b^2 = (a-b) \times (a+b) = 144$.

On reconnaît là, $(a-b) \times (a+b) = 144$, une écriture multiplicative de 144 de deux entiers naturels $a+b$ et $a-b$ (qui sont bien entiers naturels à condition de choisir $a \geq b$).

On identifie cette écriture multiplicative avec l'une de celles données à la sous-question précédente. En utilisant les 8 décompositions (il n'en reste que 8 car $a+b$ est forcément plus grand (ou égal) que $a-b$), on trouve les couples de solutions :

$$\left\{\begin{array}{l} a+b = 144 \ \ (L_1) \\ a-b = 1 \ \ (L_2) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2 \times a = 145 \ \ (L_1' = L_1 + L_2) \\ 2 \times b = 143 \ \ (L_2' = L_1 - L_2) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{145}{2} \ \ (L_1'' = L_1'/2) \\ b = \frac{143}{2} \ \ (L_2'' = L_2'/2) \end{array}\right.$$

Ce cas ne fournit pas de solution car a et b doivent être **entiers naturels**.

$$\left\{\begin{array}{l} a+b = 72 \ \ (L_1) \\ a-b = 2 \ \ (L_2) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2 \times a = 74 \ \ (L_1' = L_1 + L_2) \\ 2 \times b = 70 \ \ (L_2' = L_1 - L_2) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 37 \ \ (L_1'' = L_1'/2) \\ b = 35 \ \ (L_2'' = L_2'/2) \end{array}\right.$$

Ce cas fournit **la solution** $a = 37$ **et** $b = 35$.

$$\begin{cases} a+b=48 & (L_1) \\ a-b=3 & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2\times a=51 & (L'_1=L_1+L_2) \\ 2\times b=45 & (L'_2=L_1-L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} a=\frac{51}{2} & (L''_1=L'_1/2) \\ b=\frac{45}{2} & (L''_2=L'_2/2) \end{cases}$$

Ce cas ne fournit pas de solution car a et b doivent être **entiers naturels**.

$$\begin{cases} a+b=36 & (L_1) \\ a-b=4 & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2\times a=40 & (L'_1=L_1+L_2) \\ 2\times b=32 & (L'_2=L_1-L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} a=20 & (L''_1=L'_1/2) \\ b=16 & (L''_2=L'_2/2) \end{cases}$$

Ce cas fournit **la solution** $a=20$ **et** $b=16$.

$$\begin{cases} a+b=24 & (L_1) \\ a-b=6 & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2\times a=30 & (L'_1=L_1+L_2) \\ 2\times b=18 & (L'_2=L_1-L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} a=15 & (L''_1=L'_1/2) \\ b=9 & (L''_2=L'_2/2) \end{cases}$$

Ce cas fournit **la solution** $a=15$ **et** $b=9$.

$$\begin{cases} a+b=18 & (L_1) \\ a-b=8 & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2\times a=26 & (L'_1=L_1+L_2) \\ 2\times b=10 & (L'_2=L_1-L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} a=13 & (L''_1=L'_1/2) \\ b=5 & (L''_2=L'_2/2) \end{cases}$$

Ce cas fournit **la solution** $a=13$ **et** $b=5$.

$$\begin{cases} a+b=16 & (L_1) \\ a-b=9 & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2\times a=25 & (L'_1=L_1+L_2) \\ 2\times b=7 & (L'_2=L_1-L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} a=\frac{25}{2} & (L''_1=L'_1/2) \\ b=\frac{7}{2} & (L''_2=L'_2/2) \end{cases}$$

Ce cas ne fournit pas de solution car a et b doivent être **entiers naturels**.

$$\begin{cases} a+b=12 & (L_1) \\ a-b=12 & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2\times a=24 & (L'_1=L_1+L_2) \\ 2\times b=0 & (L'_2=L_1-L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} a=12 & (L''_1=L'_1/2) \\ b=0 & (L''_2=L'_2/2) \end{cases}$$

Ce cas ne fournit pas de solution car a et b doivent être entiers naturels **non nuls**.

Question complémentaire

A. Première situation

1. Dans l'accompagnement des programmes de cycle 3, on trouve :

   Les activités relatives à la résolution de problèmes portent sur :

   ✓ **des problèmes de recherche**, c'est-à-dire des problèmes pour lesquels l'élève ne dispose pas de démarche préalablement explorée : certains de ces problèmes sont utilisés pour permettre la construction de connaissances nouvelles, d'autres sont davantage **destinés à placer l'élève en situation de chercher, d'élaborer une solution originale** ;

   ✓ des problèmes destinés à permettre l'utilisation des acquis antérieurs dans des situations d'application et de réinvestissement ;

   ✓ des problèmes destinés à permettre l'utilisation conjointe de plusieurs connaissances dans des situations plus complexes.

   Ce type de problème relève de problèmes de recherche destinés à placer l'élève en situation de chercher, d'élaborer une solution originale, car la mise en équation étant du ressort du collège, les élèves vont fort probablement tâtonner (faire des essais successifs) pour résoudre le problème.

2. Toujours dans ce même document, on trouve les compétences suivantes commentées entre crochets :

   Au cycle 3, les compétences suivantes seront particulièrement travaillées :

   ✓ **utiliser ses connaissances pour traiter des problèmes** ; `[connaissances sur les nombres entiers naturels et les opérations telles que l'addition et/ou la soustraction]`

   ✓ **chercher et produire une solution originale dans un problème de recherche** ; `[si le tâtonnement est visé, il reste l'art et la manière de le mettre en oeuvre]`

   ✓ mettre en oeuvre un raisonnement, articuler les différentes étapes d'une solution ; `[pas ici, le problème est trop simple]`

   ✓ **formuler** et communiquer **sa démarche et ses résultats par écrit** et les exposer oralement ; `[évidemment]`

   ✓ **contrôler** et discuter **la pertinence ou la vraisemblance d'une solution** ; `[évidemment, c'est toujours le cas lors d'usage d'une procédure par tâtonnement]`

   ✓ identifier des erreurs dans une solution en distinguant celles qui sont relatives au choix d'une procédure de celles qui interviennent dans sa mise en oeuvre ; `[pas forcément ici]`

   ✓ argumenter à propos de la validité d'une solution produite par soi-même ou par un camarade (ceci suppose que les élèves ne pensent pas que la démarche est unique, et donc que l'enseignant accepte des démarches différentes). `[pas ici, car le tâtonnement semble être la seule procédure utilisable par les élèves]`

3. ✓ Problème de compréhension d'énoncé. *Aide possible* : expliquer la signification de certains termes comme "somme", "différence", ...

   ✓ Problème au niveau des calculs. *Aide possible* : inciter à vérifier à la calculette, ...

   ✓ Problème pour imaginer comment procéder. *Aide possible* : proposer des valeurs et demander de vérifier si elles sont solution, ...

   ✓ Problème pour diriger son tâtonnement. *Aide possible* : inciter à laisser une trace des différents essais (dans un tableau) puis s'aider de cette trace, ...

   ✓ Problème pour gérer deux contraintes (somme et différence). *Aide possible* : faire vérifier la solution proposée en insistant sur le "et", ...

B. Deuxième situation

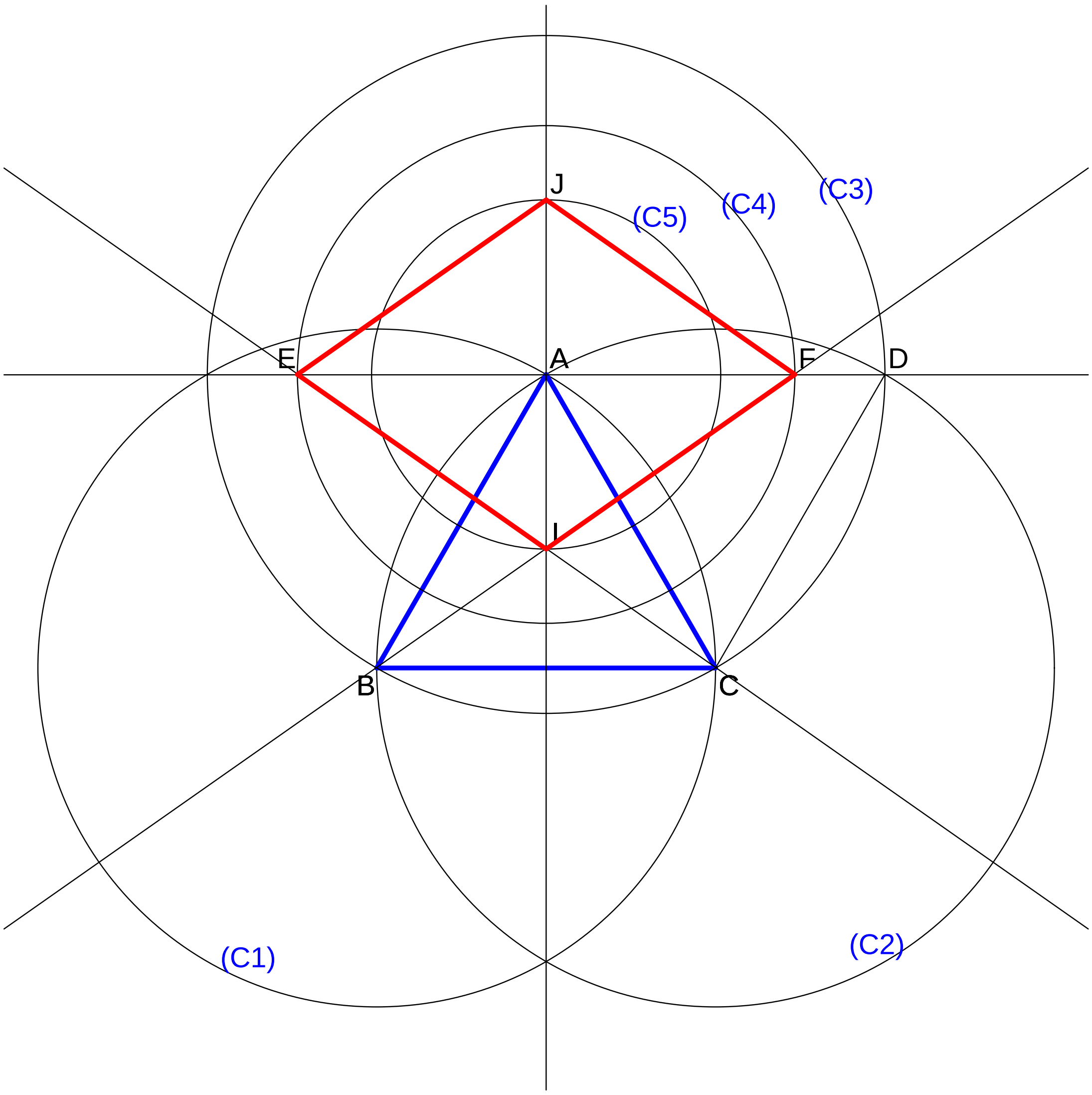
1. La différence entre les deux nombres est plus grande et de ce fait, la résolution du deuxième problème est plus délicate : faire un essai avec deux nombres qui différent de 3 ne nécessite pas de calcul pour imaginer ces deux nombres (tout au plus du surcomptage) alors que faire un essai avec deux nombres qui diffèrent de 17 nécessite un premier calcul.

2. La phase individuelle permet à chaque élève de s'approprier le problème, à son rythme. La phase par groupe de deux permet aux élèves de mettre en évidence certaines mécompréhensions du problème, de corriger certains calculs, de partager une méthode de résolution, de parfaire une rédaction de la solution, ...

3. Outre le fait que cela fasse partie des compétences exigibles de cycle 3, rédiger un raisonnement permet aux élèves de le structurer (le décomposer en plusieurs phases, ...).

Exercice 2

1. Figure qui n'est pas à l'échelle.



On trace un cercle (C_1) de centre B, de rayon $10cm$. On place C un point sur ce cercle. [C est tel que $BC = 10cm$]. On trace un cercle (C_2) de centre C, de rayon BC. On place A en l'un des intersections de (C_1) et de (C_2). [ABC est construit équilatéral : ses côtés sont isométriques]. On trace un cercle (C_3) de centre A, de rayon AC. Ce cercle (C_3) coupe le cercle (C_2) en les deux points distincts B et D. On trace la droite (AD). [la droite (AD) est construite parallèle à la droite (BC) : $ABCD$ est un losange]. On trace un cercle (C_4) de centre A, de rayon x. Ce cercle coupe la droite (AD) en deux points distincts E et F qui sont placés tels que le quadrilatère $BEFC$ soit convexe. [E et F sont tels que $AE = x$ et $AF = x$]. On place I, le point de concours des droites (BF) et (CE). On trace un cercle (C_5) de centre A, de rayon AI. Ce cercle coupe la droite (AI) en deux points distincts I et J. [$EIFJ$ est construit parallélogramme : diagonales qui se coupent en leur milieu].

2. (a) Les droites d et (BC) sont perpendiculaires car la droite d est médiatrice du segment $[BC]$. De

plus, les droites (BC) et (AD) sont parallèles. Par conséquent, la droite d est perpendiculaire à la droite (AD) (et contient A car les médiatrices d'un triangle équilatéral sont aussi hauteurs, ...).

Comme A est milieu du segment $[EF]$, et que d est la perpendiculaire à la droite (EF) passant par A, la droite d est médiatrice du segment $[EF]$, puis E et F sont symétriques par rapport à d.

(b) Soit s la symétrie orthogonale par rapport à d. On a $s(A) = A$,$s(B) = C$; $s(C) = B$; $s(E) = F$; $s(F) = E$. Par conséquent, $s((BF)) = (CE)$ et $s((CE)) = (BF)$ et $s(\underbrace{(BF)\bigcap(CE)}_{=I}) = \underbrace{(CE)\bigcap(BF)}_{=I}$ et I est sur la droite d.

$s([EI]) = [FI]$ et $s([FI]) = [EI]$, donc $EI = IF$ et le parallélogramme $EIFJ$ a deux côtés consécutifs égaux. $EIFJ$ est donc un losange.

3. (a) AH est hauteur d'un triangle équilatéral de côté mesurant $10cm$, donc $AH = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}cm = 5 \times \sqrt{3}cm$.

(b) En considérant les droites (EA) et (HC) qui sont parallèles et les sécantes (AH) et (EC), le théorème de Thalès nous donne :

$$\frac{IA}{IH}\left(=\frac{IE}{IC}\right)=\frac{AE}{HC}.$$

Puis,

$$\frac{IA}{IH}=\frac{x}{5cm}.$$

(c) On obtient donc le système suivant :

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{l} 5cm \times IA - x \times IH = 0 \quad (L_1) \\ IA + IH = AH = 5 \times \sqrt{3}cm \quad (L_2) \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow\ &\left\{\begin{array}{l} 5cm \times IA - x \times IH = 0 \quad (L_1) \\ (5cm + x) \times IA = 5 \times x \times \sqrt{3}cm \quad (L_2' = L_1 + x \times L_2) \end{array}\right. \\
\Longrightarrow\ & IA = \frac{5 \times x \times \sqrt{3}cm}{5cm + x}.
\end{aligned}$$

Question complémentaire

1. Cet exercice permet d'évaluer les compétences des élèves à reconnaître (grâce à des propriétés telles que "côtés isométriques" pour le losange et "côtés isométriques et perpendiculaires" pour le carré) des losanges et des carrés dans des figures complexes.
2. Pour trouver un losange, l'élève doit pouvoir constater les égalités de longueurs des côtés. Pour trouver un carré, l'élève doit, en plus, pouvoir identifier les angles droits.

   Pour l'égalité des longueurs des côtés, l'élève doit pouvoir

   ✓ soit mesurer à la règle graduée et conclure,

   ✓ soit comparer les longueurs en utilisant le compas et conclure,

✓ soit encore invalider visuellement comme losange le rectangle non carré et le parallélogramme ni losange ni rectangle, en utilisant ou non le cercle tracé.

Pour l'identification des angles droits, l'élève doit pouvoir

✓ soit utiliser l'équerre pour comparer les angles avec l'angle droit de l'équerre,

✓ soit encore invalider visuellement comme rectangle le losange non carré et le parallélogramme ni losange ni rectangle.

3. Procédures ? Il est impossible de répondre à cette question, car il n'est trace que de la réponse, pas de la démarche : l'élève a-t-il utilisé la règle, le compas, l'équerre, la perception visuelle, ... !

Elève A

Erreurs : il a colorié l'intérieur et non les côtés, comme demandé, mais il ne s'agit pas vraiment d'une erreur car "qui peut le plus, peut le moins" ; pour le losange (exercice 16), il a colorié les figures sans angle droit (on ne demandait d'en colorier qu'une) ; pour le carré (exercice 25), il a colorié les figures avec angles doits (on ne demandait d'en colorier qu'une).

Origines possibles : mauvaise conception du carré (exercice 25) (quadrilatères à angles droits ?, omettant que les côtés doivent également être de même longueur) et du losange (exercice 16) (quadrilatère sans angle droit ?).

Elève B

Erreurs : pour le losange (exercice 16), aucune erreur car le carré est un losange particulier ; pour le carré (exercice 25), il a colorié les figures avec angles doits (on ne demandait d'en colorier qu'une).

Origines possibles : le choix du carré (exercice 16) et non du losange non carré (exercice 16) peut être dû au fait que le carré (exercice 16) est plus ou moins dans la disposition usuelle du losange ; mauvaise conception du carré (exercice 25) (quadrilatères à angles droits ?, omettant que les côtés doivent également être de même longueur).

Elève C

Erreurs : pour le losange (exercice 16), il a colorié le carré (exercice 16), le losange non carré (exercice 16) et le parallélogramme ni rectangle ni losange (exercice 16) (on ne demandait d'en colorier qu'une) ; pour le carré (exercice 25), il a colorié les figures avec angles doits (on ne demandait d'en colorier qu'une).

Origines possibles : le carré (exercice 16) est probablement colorié parce que dans la disposition usuelle du losange, le losange non carré (exercice 16) et le parallélogramme ni rectangle ni losange (exercice 16) probablement parce que perceptiblement proche du losange au niveau de la forme ; mauvaise conception du carré (exercice 25) (quadrilatères à angles droits ?, omettant que les côtés doivent également être de même longueur).

Elève D

Erreurs : pour le losange (exercice 16), aucune erreur ; pour le carré (exercice 25), il a colorié le rectangle non carré (exercice 25).

Origines possibles : le rectangle non carré (exercice 25) est probablement colorié parce que l'élève a omis de vérifier les égalités de longueurs des côtés.

Exercice 3

1. (a) "Les deux échelles sont régulières" signifie qu'il y a proportionnalité des écarts.

   Ainsi, augmenter de $100^{\circ}C - 0^{\circ}C = 100^{\circ}C$ correspond à augmenter de $212F - 32F = 180F$. Par suite, augmenter de $100^{\circ}C/10 = 10^{\circ}C$ correspond à augmenter de $180F/10 = 18F$ ou diminuer de $100^{\circ}C/10 = 10^{\circ}C$ correspond à diminuer de $180F/10 = 18F$. Ces deux simples règles permettent de compléter le tableau de proche en proche.

Celsius	-50	-40	-30	-20	-10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Fahrenheit	-58	-40	-22	-4	14	32	50	68	86	104	122	140	158	176	194	212

   (b) Il n'y a pas relation de proportionnalité entre ces deux grandeurs (car les 0 ne coïncident pas), mais il y a proportionnalité des écarts.

2. On suppose $T = a \times t + b$.

   On cherche a et b en utilisant les couples de valeurs $t = 0^{\circ}C$, $T = 32F$ et $t = 100^{\circ}C$, $T = 212F$ en résolvant le système linéaire :

$$\begin{cases} a \times 0^{\circ}C + b = 32F \quad (L_1) \\ a \times 100^{\circ}C + b = 212F \quad (L_2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b = 32F \quad (L_1) \\ a \times (100^{\circ}C - 0^{\circ}C) = 212F - 32F \quad (L_2' = L_2 - L_1) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b = 32F \quad (L_1) \\ a = \frac{180F}{100^{\circ}C} = 1,8F/C^{\circ} \quad (L_2'' = L_2'/100^{\circ}C) \end{cases}$$

   Puis, $T = 1,8F/C^{\circ} \times T + 32F$.

3. (a) En utilisant la relation ci-dessus, une température de $25^{\circ}C$ correspond à une température de $1,8F/C^{\circ} \times 25^{\circ}C + 32F = 77F$.

   (b) Sur le tableau, $25^{\circ}C$ est le milieu de $[20^{\circ}C, 30^{\circ}C]$, la valeur correspondante est donc le milieu de $[68F, 86F]$ soit $\frac{68F+86F}{2} = 77F$.

4. Soit x le nombre de degrés celcius qui correspond à x Fahrenheit.

   On a alors $x = 1,8 \times x + 32$, ce qui équivaut à $-32 = (1,8-1) \times x = 0,8 \times x$ ou encore $x = -40$.

   Ceci est vérifiable sur le tableau de la question 1.