Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2006 du sujet d'Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice, Toulouse

Exercice 1

1. $1h = 3600s$.
   (a) $\frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \times 3600s = 2400s$.
   (b) $1,2h = 1,2 \times 3600s = 4320s$.
2. (a) $5532s = 92min12s = 1h32min12s$.
   En effet, la division euclidienne de 5532 par 60 s'écrit algébriquement $5532 = 60 \times 92 + 12$ et la division euclidienne de 92 par 60 s'écrit algébriquement $92 = 60 \times 1 + 32$.
   (b) $1,87h = 1,87 \times 3600s = 6732s$, puis $6732s = 112min12s = 1h52min12s$.
   En effet, la division euclidienne de 6732 par 60 s'écrit algébriquement $6732 = 60 \times 112 + 12$ et la division euclidienne de 112 par 60 s'écrit algébriquement $112 = 60 \times 1 + 52$.
3. Pour répondre à la question, il suffit de synthétiser les données dans un tableau de proportionnalité puis de conclure en utilisant par exemple le produit en croix.

mesure de l'angle en degrés	360°	54°
durée en minutes	$60min$	x

   Et, $x = \frac{60min \times 54^\circ}{360^\circ} = 9min$.
4. Ici encore, pour répondre à la question, il suffit de synthétiser les données dans un tableau de proportionnalité puis de conclure en utilisant par exemple le produit en croix.

mesure de l'angle en degrés	360°	68°
durée en minutes	$12 \times 60min$	x

   Et, $x = \frac{12 \times 60min \times 68^\circ}{360^\circ} = 136min$. Il sera donc $12h + 136min = 12h + 2h16min = 14h16min$. En effet, la division euclidienne de 136 par 60 s'écrit algébriquement $136 = 60 \times 2 + 16$.

5. (a) Pour calculer des durées, il suffit de mettre toutes les données horaires sur le même référentiel, mettons à l'heure de Paris.

   Quand il est $3h$ à Houston, il est $3h + \underbrace{7h}_{\text{décalage horaire}} = 10h$ à Paris.

   La durée du vol est donc de $\underbrace{24h}_{\text{lendemain}} + \underbrace{10h}_{\text{heure d'arrivée}} - \underbrace{23h}_{\text{heure de départ}} = 11h$, à supposer que l'avion arrive bien le lendemain du départ et non le surlendemain ou pire encore ...

   (b) L'avion part à $10h + \underbrace{1h}_{\text{durée de l'escale}} = 11h$ de Houston (heure de Paris).

   Il arrive à Rio de Janeiro à $11h + \underbrace{10h}_{\text{durée du trajet}} = 21h$ (heure de Paris).

   Quand il est $21h$ à Paris, il est $21h - \underbrace{7h}_{\text{premier décalage horaire}} + \underbrace{3h}_{\text{deuxième décalage horaire}} = 17h$ à Rio de Janeiro.

Question complémentaire

1. D'après les documents d'accompagnement des programmes :

   Au *cycle 2*, les déterminations de durées se font d'abord par un dénombrement effectif du nombre de mois, de semaines ou de jours (sur un calendrier), de retournements du sablier ou par lecture directe sur un chronomètre.

   Au *cycle 3*, pour le calcul de durées, les techniques de calcul en colonnes n'ont pas à être enseignées. Ce recours à des procédures adaptées à chaque cas est favorisé et les élèves doivent être capables de les utiliser. Par exemple : pour évaluer la durée comprise entre $2h45min$ et $4h10min$, on peut additionner trois durées : celle comprise entre $2h45min$ et $3h$, celle comprise entre $3h$ et $4h$ et celle comprise entre $4h$ et $4h10min$; ces durées sont toutes évaluables mentalement ; pour additionner deux durées (par exemple, $58min47s$ et $32min18s$), on peut additionner séparément les secondes et les minutes, puis effectuer les conversions nécessaires pour parvenir à l'expression $1h31min5s$).

   Ce n'est donc qu'au cycle 3 qu'on calcule des durées à partir d'un état initial et d'un état final. Cette activité prend donc place dans un enseignement de cycle 3.

2. ✓ "neuf heures moins dix" écrit en lettres et non en chiffres :
   - ○ d'abord, c'est difficile à écrire en chiffres : dans "$9h - 10min$", le symbole "-" est-il opératoire (dans ce cas, le résultat est $8h50min$ qui ne se lit pas de la même manière que "neuf heures moins dix") ?, sinon est-il le signe négatif (dans ce cas, on touche aux nombres relatifs non naturels, ce qui n'est pas au programme de l'Ecole) ?
   - ○ ensuite, il est bien de varier la forme des énoncés afin que l'élève ne se contente pas de faire des opérations en manipulant les données chiffrées d'un énoncé ;

   ✓ "10h40" écrit en chiffres et non en lettres :
   pour varier la forme des données ;

   ✓ choix des instants initiaux et finaux exprimés en heures, minutes (pas de mois, de jour, ni même de de secondes) :

la durée est donc relativement simple à calculer par une technique dite de "sauts successifs" déjà bien développée lors de la question 1 en citant le document d'application des programmes de cycle 3 (cependant, ce problème est déjà suffisamment complexe et si l'objectif visé semble être la technique dite de "sauts successifs", les données sont bien choisies) ;

✓ l'instant initial est donné négativement :
ce qui fait que dans la technique dite de "sauts successifs", il est aisé de conclure que pour aller de "neuf heures moins dix" à $9h$, il faut $10min$;

✓ de même, l'instant final est donné positivement :
ce qui fait que dans la technique dite de "sauts successifs", il est aisé de conclure que pour aller de $10h$ à $10h40$, il faut $40min$;

✓ et pour finir, l'addition des sauts successifs ne pose pas de problème de retenue :
$10min + 1h + 40min = 1h50min$ et il n'y a pas eu de retenue à poser, mais ce n'aurait pas été le cas en remplaçant dans l'énoncé "neuf heures moins dix" par "neuf heures moins vingt-cinq" qui aurait donné $25min + 1h + 40min = 1h65min$ qui aurait dû ensuite être ramené à $2h5min$ par transfert de $60min$ en $1h$.

3. ✓ $\boxed{\text{Mélanie}}$ *Procédure correcte* : technique dite de "sauts successifs". *Erreurs* : aucune.

   ✓ $\boxed{\text{Thomas}}$ *Procédure correcte* : soustraction en ligne. *Erreurs* : la donnée "neuf heures moins dix" est d'abord mal traduite par $9h50$ au lieu de $8h50$, puis l'opération $10h40 - 9h50$ est considérée comme $1040 - 950$, sans tenir compte du "h". Remarque : la technique de soustraction directe (que ce soit en lighne ou en colonne) n'est pas une compétence visée par les programmes et il est normal qu'elle engendre des difficultés (on lui préférera la technique dite de "sauts successifs").

   ✓ $\boxed{\text{Sabrina}}$ *Procédure farfelue* : addition des données chiffrées de l'énoncé (10 et 40). *Erreurs* : elle n'a pas compris le problème.

   ✓ $\boxed{\text{Kevin}}$ *Procédure farfelue* : addition des données chiffrées ou non de l'énoncé ("neuf", "dix", 10 et 40). *Erreurs* : il n'a pas compris le problème.

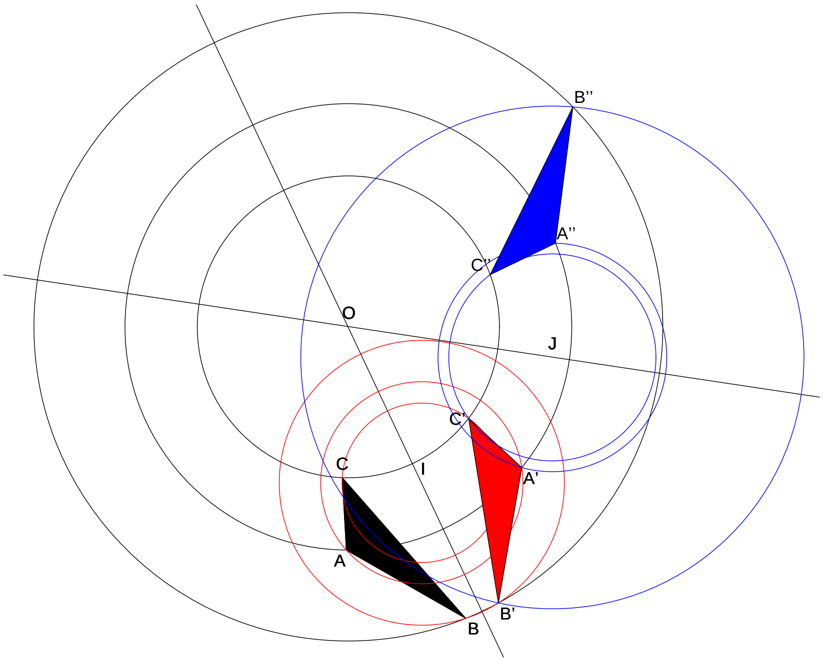
4. Des supports pour visualiser le temps peuvent être utilisés :

   ✓ une frise du temps sur laquelle l'enseignant utilise l'additivité des grandeurs en avançant d'abord de $10min$ sur la frise pour arriver à $10h$, puis d'$1h$ pour arriver à $11h$ et enfin de $40min$ pour arriver à $10h40min$; [on visualise le temps et on fait vivre la technique visée par "sauts successifs"] ;

   ✓ une horloge sur laquelle l'enseignant utilise l'additivité des grandeurs en faisant avancer la grande aiguille de $10min$, puis la petite aiguille d'$1h$, et enfin celle des minutes de $40min$; [on visualise le temps et on fait vivre la technique visée par "sauts successifs"].

Exercice 2

1. Les cercles en noir sont de centre O, en rouge de centre I, en bleu de centre J.
2. S'il existait une symétrie qui envoie A sur A'', B sur B'', C sur C'', dans ce cas, les milieux I de $[AA']$, J de $[BB'']$, K de $[CC'']$, ce qui n'est visuellement pas le cas : I et K semblent être près de la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$ tandis que K semble proche de la droite (OJ).



3. Soit σ_1 la symétrie orthogonale d'axe (OI) et σ_2 la symétrie orthogonale d'axe (OJ)

   On a $\sigma_1(O) = O$, $\sigma_1(I) = I$ et $\sigma_1(B) = B'$. Puis $\widehat{BOI} = \widehat{IOB'}$ car une symétrie conserve les angles.

   On a $\sigma_2(O) = O$, $\sigma_2(J) = J$ et $\sigma_2(B') = B''$. Puis $\widehat{B'OJ} = \widehat{JOB''}$ car une symétrie conserve les angles.

   Enfin,

$$\begin{aligned}\widehat{BOB''} &= \underbrace{\widehat{BOI}}_{=\widehat{IOB'}} + \widehat{IOB'} + \widehat{B'OJ} + \underbrace{\widehat{JOB''}}_{=\widehat{B'OJ}} \\ &= 2 \times \widehat{IOB'} + 2 \times \widehat{B'OJ} \\ &= 2 \times (\underbrace{\widehat{IOB'} + \widehat{B'OJ}}_{=\widehat{IOJ}}) \\ &= 2 \times \widehat{IOJ}\end{aligned}$$

   La démonstration précédente est incorrecte avec O, I, J, A, B, et C quelconques : il faudrait alors utiliser des angles orientés. Cependant, dans la configuration donnée, la démonstration précédente, avec des angles géométriques, est correcte.

4. De façon analogue, on obtient $\widehat{AOA''} = 2 \times \widehat{IOJ}$ et $\widehat{COC''} = 2 \times \widehat{IOJ}$.

   De plus, par la construction donnée en première question (mais ceci peut aussi se démontrer aisément en utilisant σ_1 et σ_2), on a (en considérant les cercles en noir) : $OA = OA' = OA''$ et $OB = OB' = OB''$ et $OC = OC' = OC''$.

   De $OA = OA''$, $OB = OB''$, $OC = OC''$, $2 \times \widehat{IOJ} = \widehat{AOA''} = \widehat{BOB''} = \widehat{COC''}$, on déduit que le triangle ABC s'envoie sur le triangle $A''B''C''$ par la rotation de centre O et d'angle $2 \times \widehat{IOJ}$.

Question complémentaire

1. (a) N'ayant aucun matériel à leur disposition, la seule propriété de la symétrie orthogonale qui peut être mise en pratique dans cette activité de découverte de la symétrie orthogonale est que la

symétrie orthogonale "conserve la forme et la taille". Plus mathématiquement, on peut dire que c'est le fait qu'une symétrie orthogonale est une $\boxed{\text{isométrie}}$ qui est utilisé dans la première activité. S'agissant d'une activité de découverte (en effet, le vocabulaire "symétrie" ou "axe de symétrie" est encore absent, la propriété qu'on met en lumière dans cette séance, c'est-à-dire la symétrie orthogonale en tant qu'isométrie, constitue une propriété de base de la symétrie, ...) de la symétrie orthogonale, elle tient place au **cycle 2**.

(b) Les élèves ne disposent d'aucun matériel car il s'agit dans un premier temps de faire un travail de **conjecture perceptive** sur la forme.

(c) L'argument principal qui doit paraître lors de cette phase est que **les formes et tailles doivent coïncider dans les parties gauches et droites**.

(d) Comment les élèves peuvent-ils valider ? Justement en utilisant la remarque qui a dû émerger lors de la mise en commun : "les formes et tailles doivent coïncider dans les parties gauches et droites". Ainsi, par exemple :

- ✓ l'élève associe 5 et B (les petits 1/2-papillons) ;
- ✓ l'élève associe 3 et F (les grands 1/2-papillons) ;
- ✓ l'élève associe 6 et C (les seuls 1/2-papillons qui ont des ailes d'une forme très découpée parmi ceux qui restent) ;
- ✓ l'élève associe 2 et A (les 1/2-papillons qui ont les antennes les plus longues parmi ceux qui restent)
- ✓ l'élève associe 4 et E (les 1/2-papillons qui ont la plus grande envergure parmi ceux qui restent)
- ✓ l'élève associe 1 et B (les seuls 1/2-papillons qui restent)

Sinon, une véritable validation ne semble pas de mise à cause de l'absence de matériel : l'élève valide ou non, en s'auto-corrigeant de façon perceptive, les résultats qu'il avait imaginé avant la mise en commun.

2. (a) On peut citer dans le programme de cycle 2 la compétence : vérifier par pliage si une figure a un axe de symétrie. C'est maintenant cette compétence (au lieu du pliage, c'est le retournement, mais l'idée est la même) qu'il va falloir travailler parce que les formes et tailles des nouveaux 1/2-papillons sont suffisamment proches les unes des autres pour mettre en doute (sinon discréditer) l'intuition visuelle. Plus mathématiquement, on peut dire que c'est le fait qu'une symétrie orthogonale est un $\boxed{\text{anti-déplacement}}$ qui est utilisé dans la deuxième activité.

(b) L'usage du papier transparent permet cette fois de vérifier une juxtaposition des deux 1/2-papillons après retournement du papier transparent.

Exercice 3

1. La division euclidienne de 1001 par 11 s'écrit algébriquement : $1001 = 11 \times 91 + 0$.

2.

$$\begin{aligned}\overline{mcdu} &= 1000 \times m + 100 \times c + 10 \times d + u \\ &= (1001 - 1) \times m + (99 + 1) \times c + (11 - 1) \times d + u \\ &= 1001 \times m + 99 \times c + 11 \times d - m + c - d + u\end{aligned}$$

3. (a) Enoncé :

Soit $N = \overline{mcdu}$ un nombre entier naturel. N est divisible par 11 si et seulement si $-m + c - d + u$ ou $m - c + d - u$ est divisible par 11.

Remarque : on aurait pu également donner comme énoncé (en considérant que la notion de divisibilité sur $\mathbb{N}$ se prolonge sur $\mathbb{Z}$) :

Soit $N = \overline{mcdu}$ un nombre entier naturel. N est divisible par 11 si et seulement si $-m + c - d + u$ est divisible par 11.

Démonstration N est divisible par 11 **implique** $-m + c - d + u$ ou $m - c + d - u$ est divisible par 11 :

$$\underbrace{N}_{\text{multiple de } 11} = \underbrace{1001 \times m + 99 \times c + 11 \times d}_{=11\times(91\times m+9\times c+d) \text{ qui est donc multiple de } 11} -m + c - d + u.$$

Or, la différence entre deux multiples de 11 est encore un multiple de 11.

i. Donc, si $N \geq 1001 \times m + 99 \times c + 11 \times d$, $N - 1001 \times m + 99 \times c + 11 \times d = -m + c - d + u$ est multiple de 11,

ii. et si $N < 1001 \times m + 99 \times c + 11 \times d$, $1001 \times m + 99 \times c + 11 \times d - N = m - c + d - u$ est multiple de 11.

Démonstration $-m + c - d + u$ ou $m - c + d - u$ est divisible par 11 **implique** N est divisible par 11 :

$$N = \underbrace{1001 \times m + 99 \times c + 11 \times d}_{=11\times(91\times m+9\times c+d) \text{ qui est donc multiple de } 11} -m + c - d + u.$$

i. Si c'est $-m + c - d + u \geq 0$ qui est multiple de 11, alors N est aussi multiple de 11 car la somme de deux multiples de 11 est encore un multiple de 11,

ii. mais si c'est $m - c + d - u > 0$ qui est multiple de 11, alors N est aussi multiple de 11 car la différence (qui est N car $N \in \mathbb{N}$) de deux multiples de 11 est encore un multiple de 11.

(b) Un nombre qui a 38 centaines s'écrit $\overline{38du}$.

Cherchons avec $d = 0$ une solution. Dans ce cas, par le critère vu ci-haut, $-8 - u + 3 + 0 = -u - 5$ ou $8 + u - 3 - 0 = u + 5$ doit être multiple de 11 et $u = 6$ fournit une solution : 3806.

Ainsi, 3806 est un multiple de 11 et en ajoutant itérativement 11, on obtient d'autres multiples de 11 : 3817, 3828, 3839, 3850, 3861, 3872, 3883, 3894.

4. (a) Le critère de la question précédente ne s'applique pas aux nombres à 6 chiffres (bien qu'on puisse remplacer le chiffre m des milliers d'un nombre à quatre chiffre $N = \overline{mcdu}$ par le nombre $M = \overline{abm}$ de milliers d'un nombre à six chiffres $N' = \overline{abmcdu}$, ce n'est probablement pas l'objectif visé ici) : cela n'a pas de sens. Il s'agit donc d'une erreur d'énoncé.

En fait, les auteurs du sujet souhaitaient probablement une forme bien particulière de l'énoncé (qui est valable autant pour un nombre à 4 chiffres, que pour un nombre à 6 chiffres, que ...) du critère de divisibilité par 11, comme par exemple :

> **Un nombre est divisible par 11 si et seulement si l'écart entre la somme de ses chiffres de rang pair et la somme de ses chiffres de rang impair est multiple de 11.**

$$\begin{aligned}
\overline{abmcdu} &= 100000 \times a + 10000 \times b + 1000 \times m + 100 \times c + 10 \times d + u \\
&= (100001 - 1) \times a + (9999 + 1) \times b + (1001 - 1) \times m + (99 + 1) \times c + (11 - 1) \times d + u \\
&= \underbrace{100001 \times a + 9999 \times b + 1001 \times m + 99 \times c + 11 \times d}_{=11 \times (9091 \times a + 909 \times b + 91 \times m + 9 \times c + d)} - a + b - m + c - d + u.
\end{aligned}$$

La suite de la démonstration est alors analogue à celle donnée en question 3.(a).

(b) Comme dit dans la remarque de la question 4.(a), le critère est valable quel que soit le nombre de chiffres. C'est donc encore vrai pour un nombre à 12 chiffres (bien que ce n'ait pas été démontré dans cet exercice) et le critère de divisibilité par 11 donne le résultat $1,2452 \times 10^{11}$ est divisible par 11 (car $(1 + 4 + 2 + 0 + 0 + 0) - (2 + 5 + 0 + 0 + 0 + 0) = 0$ est divisible par 11). Cependant, ce n'est probablement pas la démonstration attendue par les auteurs du sujet puisqu'elle n'utilise pas le critère de divisibilité par 11 d'un nombre à 6 chiffres.

Autre démonstration utilisant le critère de divisibilité par 11 d'un nombre à 6 chiffres ...

124520 est divisible par 11 car $(1 + 4 + 2) - (2 + 5 + 0) = 0$ est divisible par 11. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{N}$ tel que $124520 = \lambda \times 11$.

Puis, $1,2452 \times 10^{11} = 124520 \times 10^6 = (\lambda \times 11) \times 10^6 = (\lambda \times 10^6) \times 11$ est aussi un multiple de 11.