# Concours de recrutement de professeur des écoles session 2014, groupement académique 2

Corrigé non officiel de la deuxième épreuve d'admissibilité proposé par http ://primaths.fr

## Première partie

### La montée à la station.

1. 25/100 est le rapport du côté opposé à l'angle $\alpha$ sur son côté adjacent, c'est donc la tangente de cet angle.
   On a donc $tan\,(\alpha) = 0,25$ d'où on tire, à l'aide de la calculatrice, $\alpha \approx 14°$.
2. Le rapport dénivelé/déplacement horizontal est égal à 25/100 soit 1/4, ce qui revient à dire que le déplacement horizontal est égal à quatre fois le dénivelé. Si le dénivelé est de 145 m, le déplacement horizontal est donc de 580 m. La route est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement 145 m et 580 m. On a donc, si on note L la longueur cherchée, $L^2 = 580^2 + 145^2 = 357425$, d'où $L = \sqrt{357425} \approx 598$.
   La longueur de ce tronçon de route est d'environ 598 m.
   *Remarque : il est plus rapide d'utiliser une seule étape de trigonométrie, la solution ci-dessus a été choisie pour montrer qu'on pouvait répondre à cette question même en ayant tout oublié de la trigonométrie.*

### Ski sur la Streif

1. Pour sa descente, Albert skie pendant 1 min et 13 s entre son départ et 15 h, puis encore 3 min et 8 s. La durée totale de sa descente est de 4 min 21 s ou 261 s.
   La distance parcourue en moyenne par Albert en une seconde est donc égale à 3312 m : 261.
   À la même vitesse, Albert parcourrait en une heure 3600 fois plus de distance qu'en une seconde, il parcourrait $\left(\frac{3312}{261} \times 3600\right)$ mètres soit environ 45683 mètres ou 45,683 km.
   La vitesse moyenne d'Albert est donc d'environ 45,7 km/h.
2. À 100 km/h, on parcourt 1 km en 1/100 d'heure, c'est-à-dire en 36 secondes. Pour parcourir 3,312 km, le meilleur skieur aura donc besoin de $3,312 \times 36$ secondes, soit 119,232 secondes. Son avance à l'arrivée, différence entre les durées des deux trajets, serait donc de 261-119,232 soit environ 141,8 secondes, ou 2 min 21,8s.

### Saut sur la Streif

1. L'image de 10 par la fonction S est égale à $2,5 - \frac{(20-55)^2}{1210}$ soit $2,5 - \frac{1225}{1210}$ soit environ 1,49. Cela signifie que, lors de son saut, quand Albert s'est déplacé horizontalement de 10 m, il est à environ 1,49 m du sol.
2. Utilisation de la courbe représentative de la fonction S
   (a) 55 m est la longueur du saut d'Albert (mesurée en déplacement horizontal, et non le long de la pente de la piste).
   (b) La hauteur maximale du saut d'Albert est d'environ 2,5m, elle correspond à une déplacement horizontal d'environ 27,5m.

3. L'expression $(2x-55)^2$étant un carré, elle est toujours positive ou nulle. L'expression $\frac{(2x-55)^2}{1210}$ est donc également positive ou nulle.
   Il en résulte que la valeur de S ne peut pas dépasser 2,5.
   Or, quand $x = \frac{55}{2} = 27,5$ on a $\frac{(2x-55)^2}{1210} = 0$ et donc $S(x) = 2,5$
   La fonction S atteint la valeur 2,5 mais ne peut pas la dépasser, 2,5 est donc son maximum.
   La hauteur maximale du saut d'Albert est donc de 2,5 m.

### Tir à la carabine

1. L'aire d'un disque est proportionnelle au carré de son rayon. On en déduit que l'aire du disque de rayon 10 cm vaut 4 fois l'aire du disque central, et que l'aire du disque de rayon 15 cm vaut 9 fois l'aire du disque central. Par différence, l'aire de la couronne extérieure est donc égale à 5 fois l'aire du disque central.
   *Remarque : on peut aussi formuler ce qui précède en disant que dans un agrandissement de coefficient k, les aires sont multipliées par $k^2$. Or, des disques ont tous « la même forme », ils sont des agrandissements ou des réductions les uns des autres.*
   Si un tireur débutant touche la cible, la probabilité qu'il la touche est de 1. La probabilité d'atteindre une zone étant proportionnelle à l'aire de cette zone, la probabilité d'atteindre la zone centrale est 9 fois plus petite, elle est de $1/9$, et celle d'atteindre la couronne extérieure est 5 fois plus importante, elle est de $5/9$.
2. Un tireur débutant atteint la cible une fois sur deux, et dans le cas où il l'atteint il atteint le cœur une fois sur 9 (voir question précédente). La probabilité que le tireur débutant atteigne le cœur de la cible est donc $\frac{1}{2} \times \frac{1}{9}$ soit $\frac{1}{18}$.

## Deuxième partie

### Exercice 1

1. Ce problème relève de la division euclidienne.
2. Trois procédures pour répondre à la question posée (*remarquons que deux questions sont posées*).
   (a) En posant la division de 83 par 5, on obtient un quotient de 16 et un reste de 3.
   $83 = 16 \times 5 + 3$. Ce résultat signifie que pour ôter 83 pétales, il faut effeuiller 16 fleurs entières et enlever 3 pétales de la 17e fleur. Sur la 17e fleur, il reste donc 2 pétales.
   (b) Deux fleurs correspondent à 10 pétales. 83 c'est 8 dizaines et 3 unités, Mathis a donc effeuillé entièrement 8 groupes de 2 fleurs, soit 16 fleurs, et 3 pétales. Sur la 17e fleur, il reste donc 2 pétales.
   (c) 10 fleurs correspondent à 50 pétales. 6 fleurs correspondent à 30 pétales. 16 fleurs (10 + 6) correspondent donc à 80 pétales. Mathis a donc effeuillé entièrement 16 fleurs. Il a également enlevé 3 pétales sur une 17e fleur, à laquelle il reste 2 pétales.

*Remarque : si* la question *à laquelle se réfère le sujet est la deuxième question posée aux élèves, on peut envisager la procédure suivante : 83 ne se terminant ni par un 0 ni par un 5, ce n'est pas un multiple de 5, Mathis n'a donc pas effeuillé exactement un nombre entier de fleurs, il reste des pétales sur la dernière fleur.*

**Exercice 2**

1. Si Emma avait un bonbon de moins, elle pourrait les regrouper par 2, 3, 4, 5 ou 6 sans qu'il en reste. Le nombre de bonbons d'Emma serait alors un multiple commun à 2, 3, 4, 5 ou 6. En décomposant en facteurs premiers ceux de ces nombres qui ne sont pas eux-mêmes premiers, on obtient : $4 = 2 \times 2$ et $6 = 2 \times 3$ . Le plus petit multiple commun non nul des nombres 2 ; 3 ; $2 \times 2$ ; 5 et $2 \times 3$ est $2 \times 2 \times 3 \times 5$ soit 60. Les autres multiples communs à ces nombres valent au moins 120 et ne peuvent donc pas convenir puisque Emma a moins de 100 bonbons.
   On en conclut que si Emma avait un bonbon de moins elle en aurait 60, elle en a donc 61.
2. Usage du tableur
   (a) Les formules =MOD(A2 ;2) et =MOD(A2 ;B$1) conviennent toutes les deux.
   *Remarque : Ces formules conviennent parce qu'il n'est question que de les étendre vers le bas. Aucune des deux ne conviendrait si on devait étendre également vers la droite. Dans ce cas, on pourrait par exemple écrire =MOD($A2 ;B$1).*
   (b) Jules peut agrandir ce tableau vers le bas en cherchant une ligne pour laquelle tous les restes sont égaux à 1. Il obtiendra ce résultat quand le nombre écrit dans la colonne A sera égal à 61.

**Exercice 3**

1. $10^2 - 9^2 - 8^2 + 7^2 = 100 - 81 - 64 + 49 = 149 - 145 = 4$.
   On peut conjecturer que, pour tout entier n, $(n+3)^2 - (n+2)^2 - (n+1)^2 + n^2 = 4$.
2. Développons l'expression $S = (n+3)^2 - (n+2)^2 - (n+1)^2 + n^2$.
   On obtient successivement :
   $S = n^2 + 6n + 9 - \left(n^2 + 4n + 4\right) - \left(n^2 + 2n + 1\right) + n^2$ ;
   $S = n^2 + 6n + 9 - n^2 - 4n - 4 - n^2 - 2n - 1 + n^2$ ;
   $S = n^2 - n^2 - n^2 + n^2 + 6n - 4n - 2n + 9 - 4 - 1$ ;
   $S = 4$.

**Exercice 4**

1. Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux respectifs de [BA] et [BC] donc IJ = AC/2.
   On démontre de la même façon que KL=AC/2 ; IL=BD/2 et KJ=BD/2.
   Le solide étant un cube, sa face ABCD est un carré, ses diagonales ont donc la même longueur : AC = BD.
   Il résulte des deux étapes précédentes que les quatre côtés de IJKL ont la même longueur, c'est donc un losange.

   Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux respectifs de [BA] et [BC] donc (IJ) // (AC) ; on montre de même que (KJ)//(BD).
   ABCD est un carré donc ses diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
   (IJ) est parallèle à (AC) et (AC est perpendiculaire à (BD) donc (IJ) est perpendiculaire à (BD).
   (KJ) est parallèle à (BD) et (BD) est perpendiculaire à (IJ) donc (KJ) est perpendiculaire à (IJ). Le losange IJKL a donc deux côtés perpendiculaires, par conséquent c'est un carré.

*Remarque : il existe de très nombreuses autres démonstrations valides. On peut par exemple prouver l'égalité des longueurs des côtés de IJKL en utilisant les triangles AIL, BIJ... On peut prouver que le losange IJKL est un carré en prouvant que ses diagonales ont la même longueur, ou prouver qu'il a un angle droit en utilisant à nouveau les petits triangles AIL, BIJ...*

2. Le carré IJKL peut être obtenu en enlevant du carré ABCD quatre triangles rectangles isocèles identiques. L'aire du carré IJKL est donc égale à :
   $12^2 - 4 \times \frac{6\times 6}{2} = 144 - 4 \times \frac{36}{2} = 72$. L'aire de IJKL mesure 72 $\text{cm}^2$.
3. Si on choisit comme base de la pyramide AILM sa face ALM, la hauteur est alors le segment [AI]. On peut donc calculer le volume de AILM ainsi :
   $\frac{1}{3} \times \frac{6\times 6}{2} \times 6 = 36$. Le volume de la pyramide AILM mesure 36 $\text{cm}^3$.
4. Si on enlève du cube de 12 cm d'arête huit pyramides identiques à AILM, le volume du solide obtenu sea de $12^3 - 8 \times 36 = 1728 - 288 = 1440$.
   Le volume de ce solide sera bien de 1440 $\text{cm}^3$.

## Troisième partie

### A Enoncé à compléter

1. En complétant par « La coopérative avait acheté 25 tickets d'entrée, tous aux même prix, elle doit maintenant en acheter 20 autres », la situation relève sans ambiguïté de la proportionnalité.
2. En complétant par « Les 30 premiers élèves d'une même école paient tous le même tarif. A partir du trente-et-unième élève, une réduction de un euro par élève est appliquée », la situation ne relève plus de la proportionnalité.
   *Remarque : la question posée est elle même ambiguë : dans l'énoncé que nous proposons ici, le prix total demandé n'est pas proportionnel au nombre total d'élèves, mais on peut utiliser la proportionnalité pour résoudre certaines étapes du problème. Peut-on alors dire qu'il ne s'agit pas d'une situation de proportionnalité ?*

### B Institutionnalisation

1. L'exemple 1veut illustrer l'utilisation du coefficient de proportionnalité (toutes les valeurs d'une même grandeur sont obtenues en multipliant les valeurs de l'autre grandeur par le même nombre, qu'on appelle coefficient de proportionnalité).

2. L'exemple 2 illustre l'utilisation de la linéarité, dans son aspect multiplicatif (quand l'une des grandeurs est multiplée par un nombre, l'autre grandeur est multipliée par le même nombre, quand l'une des grandeurs est divisée par un nombre, l'autre grandeur est divisée par le même nombre).
3. Les rapports dont il est question dans l'exemple 1 est le coefficient de proportionnalité (ici, il correspond au prix en euros par kilogramme). Le rapport qui entre en jeu dans l'exemple 2 est un rapport de linéarité, qui peut prendre n'importe quelle valeur positive (quand l'une des grandeurs est multiplée par un nombre, l'autre grandeur est multipliée par le même nombre).

4. C'est, comme dans l'exemple 2, la linéarité sous son aspect multiplicatif qui est mise à contribution.
   Une autre formulation aurait pu s'appuyer sur l'aspect additif de la linéarité : 6 stylos, c'est 3 stylos + 3 stylos, or le prix n'est pas égal à 5€ + 5€, la situation n'est donc pas proportionnelle.

## C Productions d'élèves

— Aurianne utilise la linéarité dans son aspect multiplicatif pour calculer le nombre d'œufs nécessaires pour une personne (retour à l'unité) puis pour 20 personnes.
— Emercic utilise l'aspect additif de la linéarité : pour 20 personnes (8+12), il faut les œufs nécessaires pour 8 personnes plus les œufs nécessaires pour 12 personnes.
— Nicolas utilise une propriété fausse qu'on pourrait énoncer ainsi : si on ajoute un certain nombre de personnes, il faut ajouter le même nombre d'œufs. Hors contexte, cette propriété fausse revient à dire que dans une situation de proportionnalité, si on ajoute un nombre à l'une des grandeurs, il faut ajouter le même nombre à l'autre grandeur.
— Kevin utilise comme Auriane dans son raisonnement le retour à l'unité, mais il l'énonce sous la forme de la « règle de trois ». En revanche, il n'effectue pas les opérations dans l'ordre de son discours, il utilise implicitement le fait que $(6 : 8) \times 20 = (6 \times 20) : 8$, connaissance qui lui permet d'avoir à effectuer des opérations techniquement moins difficiles.

## D Analyse d'un exercice

1. Le pourcentage de romans dans un ensemble de livres est proportionnel au nombre de livres dans cet ensemble, l'utilisation des pourcentages est bien un domaine d'utilisation de la proportionnalité.
2. Erreur de Paul
   (a) Le raisonnement de Paul s'appuie peut-être sur la valeur particulière 50% dont il sait qu'elle correspond à la moitié. Il aurait alors pensé que puisque dans une médiathèque il y a 10% de plus que la moitié et dans l'autre 10% de moins, cela se compense. Ce raisonnement est erroné parce que les deux médiathèques ne comportent pas le même nombre d'ouvrages. 10% de 5000 ouvrages, ce n'est pas la même chose que 10% de 4000 ouvrages.
   (b) Si les deux médiathèques comportaient chacune 4000 ouvrages, 40% de ce nombre correspondraient à 20% du nombre total d'ouvrages (8000) ; 60% de 4000 ouvrages correspondraient à 30% du nombre total d'ouvrages (8000). En tout, les romans représenteraient 20%+30% soit 50% des 8000 ouvrages.