Ministère de l'éducation nationale

Session 2016

PE2-16-PG3
Repère à reporter sur la copie

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

Mardi 19 avril 2016
Deuxième épreuve d'admissibilité

Mathématiques	**Durée : 4 heures** **Épreuve notée sur 40**

<u>Rappel de la notation</u> :
- première partie : **13 points**
- deuxième partie : **13 points**
- troisième partie : **14 points**

5 points au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note **globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire**.

Ce sujet contient 10 pages, numérotées de 1 à 10. Assurez-vous que cet exemplaire est complet.
S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage de la calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.

L'usage de tout autre matériel électronique, de tout ouvrage de référence et de tout document est rigoureusement interdit.

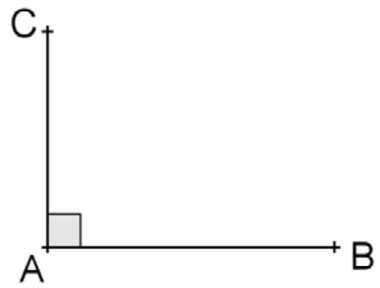
N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine etc.
Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

PREMIÈRE PARTIE (13 points)

On donne trois points A, B, C tels que AB = 8 cm, AC = 6 cm ; les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

(*le dessin ci-contre n'est pas à l'échelle*).



On place :

- un point D appartenant au segment [AB] distinct de A et B ;
- le point E, intersection du segment [BC] et de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par D ;
- le point F, intersection du segment [AC] et de la perpendiculaire à la droite (AC) passant par E.

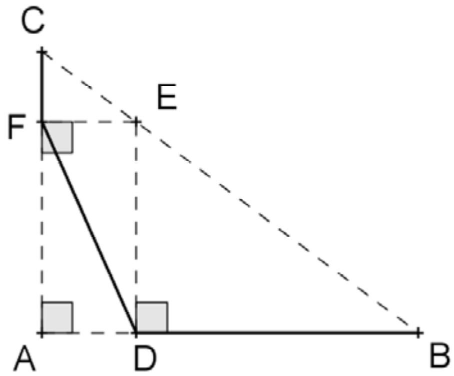


Figure 1

Le but du problème est de déterminer la position du point D pour laquelle la distance DF est minimale.

Partie A – Questions préliminaires

Les deux résultats démontrés dans cette partie pourront être utilisés dans les parties suivantes.

1. Démontrer que BC = 10 cm.

2. Déterminer une mesure en degré de l'angle $\widehat{ABC}$ (on donnera le résultat arrondi à l'unité).

3. Démontrer que AE = DF.

Partie B – Étude analytique du problème

1. **Cas particulier** : on suppose que AD = 3 cm.
   - **a.** Calculer BD, puis en déduire DE.
   - **b.** Montrer que DF = $\sqrt{23{,}0625}$.

2. **Cas général**

Dans cette partie, on pose AD = *x*.

- **a.** Quelles valeurs *x* peut-il prendre ?
- **b.** Démontrer que DE = $6 - 0{,}75x$.
- **c.** En déduire que $DF^2 = 1{,}5625x^2 - 9x + 36$.
- **d.** Vérifier que l'on peut ainsi retrouver le résultat de la question **1.b.**

3. **Recherche de la valeur de *x* pour laquelle DF est minimale.**

On admet qu'il existe une position du point D telle que DF est minimale, et donc une valeur de *x* pour laquelle DF² est minimal.

Afin de déterminer la position du point D recherchée, on utilise un tableur

	A	B	C
1	***x***	**DF²**	
2	0	36,0000	
3	0,5	31,8906	
4	1	28,5625	
5	1,5	26,0156	
6	2	24,2500	
7	2,5	23,2656	
8	3	23,0625	
9	3,5	23,6406	
10	4	25,0000	
11	4,5	27,1406	
12	5	30,0625	
13	5,5	33,7656	
14	6	38,2500	
15	6,5	43,5156	
16	7	49,5625	
17	7,5	56,3906	
18	8	64,0000	
19			
20			

Tableau 1

a. Une fois la colonne A et la cellule B1 remplies, indiquer quelle est, parmi les propositions suivantes, la formule rentrée en cellule B2 et ayant permis par recopie le remplissage la colonne B.

- Proposition 1 : = 1,5625*0²−9*0+36
- Proposition 2 : = 1,5625*A2^2−9*A2+36
- Proposition 3 : = 1,5625*x^2−9*x+36
- Proposition 4 : = 1,5625*A1^2−9*A1+36

b. Expliquer pourquoi l'utilisateur, après avoir observé les valeurs apparaissant dans la colonne B du tableau 1, a choisi de poursuivre la recherche avec les valeurs données dans la colonne D du tableau 2 ci-après.

c. L'utilisateur affine encore les calculs, en remplissant les colonnes G et H du tableau. En déduire un encadrement d'amplitude 0,02 de la valeur de *x* pour laquelle DF² est minimal.

D	E	F	G	H
x	**DF²**		***x***	**DF²**
2,5	23,2656		2,8	23,0500
2,6	23,1625		2,81	23,0477
2,7	23,0906		2,82	23,0456
2,8	23,0500		2,83	23,0439
2,9	23,0406		2,84	23,0425
3	23,0625		2,85	23,0414
3,1	23,1156		2,86	23,0406
3,2	23,2000		2,87	23,0402
3,3	23,3156		2,88	23,0400
3,4	23,4625		2,89	23,0402
3,5	23,6406		2,9	23,0406
			2,91	23,0414
			2,92	23,0425
			2,93	23,0439
			2,94	23,0456
			2,95	23,0477
			2,96	23,0500
			2,97	23,0527
			2,98	23,0556
			2,99	23,0589
			3	23,0625

Tableau 2

Partie C – Résolution du problème par une méthode géométrique

1. Construire une droite Δ et un point O n'appartenant pas à Δ. Placer le point H, intersection entre la droite Δ et la perpendiculaire à Δ passant par O, puis placer sur la droite Δ un point M distinct de H.

   Expliquer alors pourquoi OH < OM.

2.
   a. Construire un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 8 cm et AC = 6 cm.

      Utiliser la question précédente pour construire le point E sur [BC] de telle sorte que la distance AE est minimale.

      Placer les points D et F de façon à retrouver la configuration de la figure 1, puis tracer le segment [DF].

   b. En exprimant l'aire du triangle ABC de deux façons différentes, déterminer la longueur AE et en déduire la longueur DF.

   c. Calculer la distance AD et conclure par rapport au problème de départ.

DEUXIÈME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

(D'après Dimathème 2de, édition 2000, Didier)

On admet que la vitesse de la lumière dans le vide est égale à 3×10^8 m/s (mètres par seconde).

1. Une unité astronomique (1 UA) est égale à la distance moyenne Terre – Soleil ; elle vaut 150 millions de kilomètres.
Calculer le temps, exprimé en minute et seconde, nécessaire à un signal lumineux émis par le Soleil pour parvenir à la Terre, en supposant qu'il parcourt 1 UA dans le vide.

2. Une année-lumière (1 AL) est la distance parcourue dans le vide par la lumière en une année julienne (c'est-à-dire 365,25 jours).
Calculer une valeur approchée, en kilomètre, d'une année-lumière.

3. Dans le système solaire, la planète la plus éloignée du Soleil est Neptune, et sa distance moyenne par rapport au Soleil est de 4,5 milliards de kilomètres.

- **a.** Exprimer cette distance en UA.
- **b.** Si on réalisait une maquette du système solaire dans laquelle Neptune est placée à 1 m du Soleil, à quelle distance du Soleil faudrait-il placer la Terre ? On donnera le résultat arrondi au millimètre.

EXERCICE 2 :

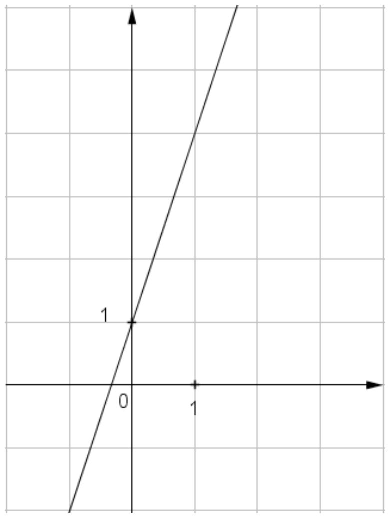
Dans cet exercice, quatre affirmations sont proposées.
Pour chacune, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, puis justifier la réponse.
Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.
Une réponse incorrecte n'enlève pas de point.

1. Une bouteille d'eau pleine a une masse de 1 215 g.
À moitié vide, elle a une masse de 840 g.
Affirmation 1 : Cette bouteille vide pèse alors 465 g.

2. Dans une classe de 25 élèves, exactement 10 élèves sont partis en vacances à la montagne l'hiver, exactement 8 élèves sont partis en vacances à la montagne l'été et exactement 5 élèves sont partis en vacances à la montagne l'hiver et l'été.

Affirmation 2 : 12 élèves de cette classe ne sont pas partis en vacances à la montagne (ni l'hiver, ni l'été).

3. **Affirmation 3** : La droite ci-contre, dans un repère orthogonal, représente la fonction affine *f* définie par $f(x) = -3x + 1$.



4. **Affirmation 4** : Le PGCD de 2016 et de 6102 est 2.

EXERCICE 3 :

Un enseignant demande à ses élèves d'une classe de troisième d'appliquer le programme de calcul suivant :

- choisir un nombre a quelconque ;
- le multiplier par 4 ;
- ajouter 7 à ce produit ;
- mettre le tout au carré ;
- écrire le résultat.

1.

a. Vérifier que le nombre obtenu sera 225 si le nombre de départ est 2.

b. Déterminer le nombre obtenu, si le nombre de départ est $\frac{1}{2}$.

2. Montrer que pour un nombre de départ a, le nombre obtenu est $16a^2 + 56a + 49$.

3.

a. Déterminer (s'ils existent) tous les nombres que l'on peut choisir au départ pour obtenir un résultat égal à 0.

b. Déterminer (s'ils existent) tous les nombres que l'on peut choisir au départ pour obtenir un résultat égal à 49.

c. Déterminer (s'ils existent) tous les nombres que l'on peut choisir au départ pour obtenir un résultat égal à – 1.

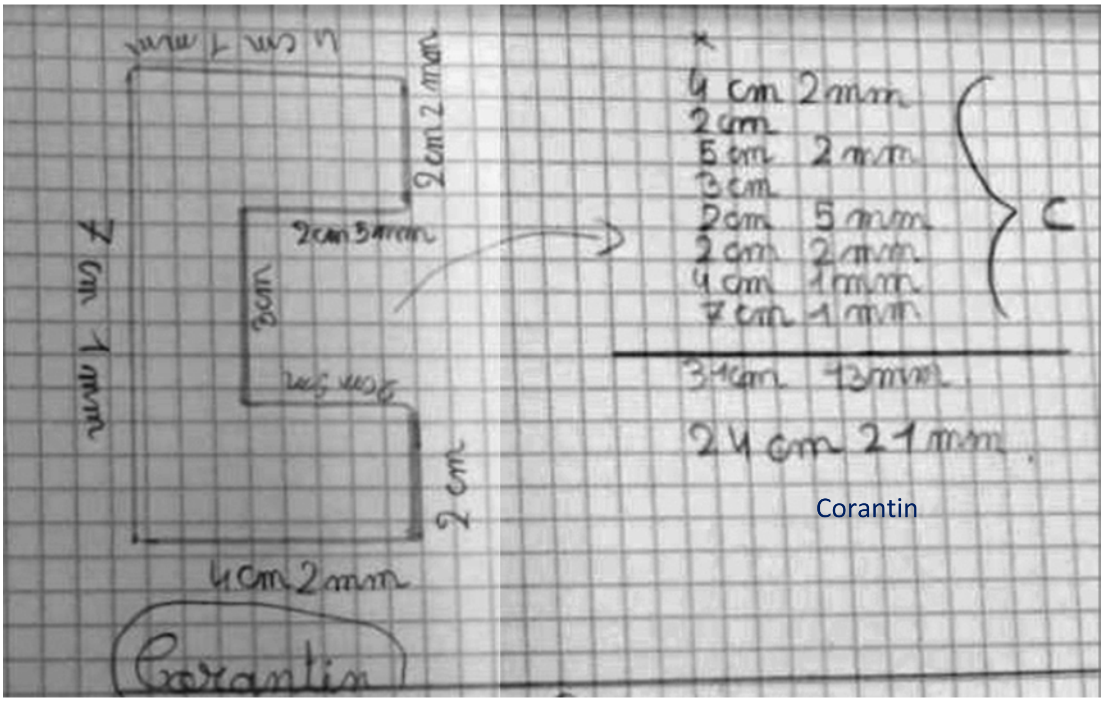
TROISIÈME PARTIE (14 points)

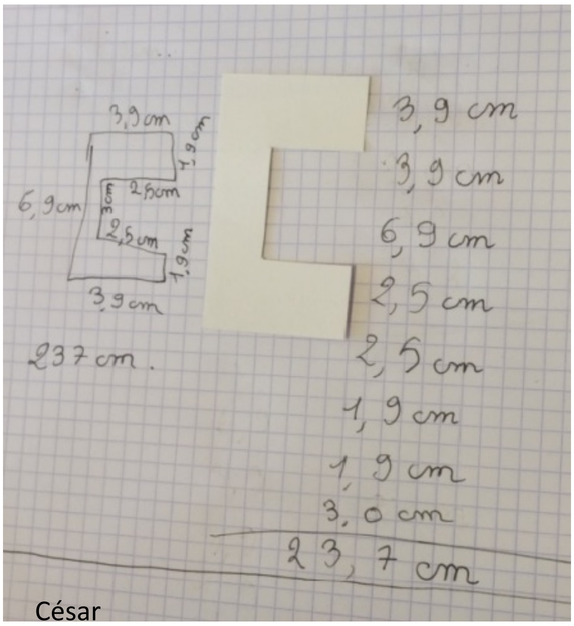
Cette partie est composée de deux situations indépendantes.

SITUATION 1 :

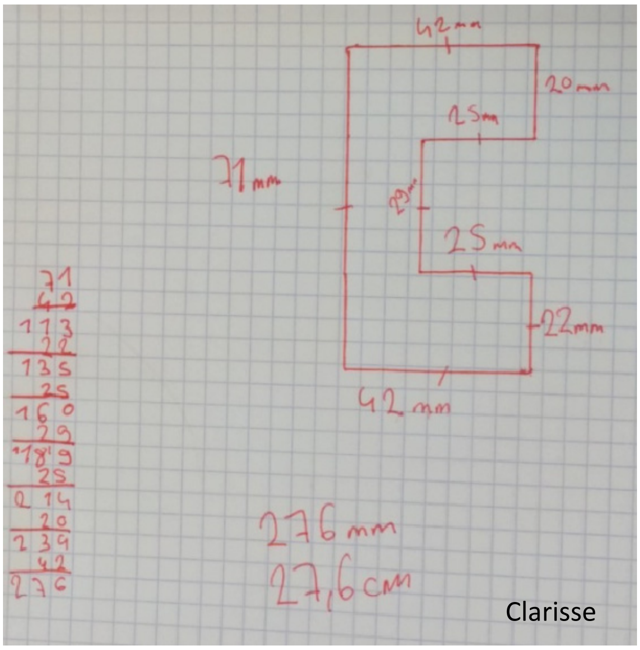
Un maître a distribué à ses élèves de CM1 des gabarits de lettres et leur a demandé de trouver la longueur de leur contour. Un groupe de trois élèves est chargé de travailler sur le gabarit de la lettre C.

1. Donner quatre compétences nécessaires pour déterminer la longueur du contour.
2. Donner deux difficultés que les élèves pourraient rencontrer pour cette tâche.
3. Voici les productions de trois élèves (Corantin, César et Clarisse):





César



Clarisse

Pour chacun de ces travaux,

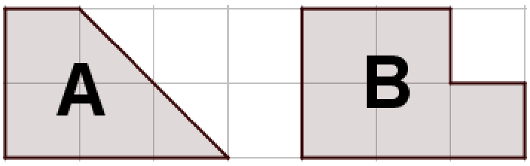
a. Analyser la trace écrite (procédures suivies, compétences mises en œuvre, erreurs éventuelles).

b. Proposer une remédiation que le professeur pourrait mettre en place pour César et Corantin.

SITUATION 2 :

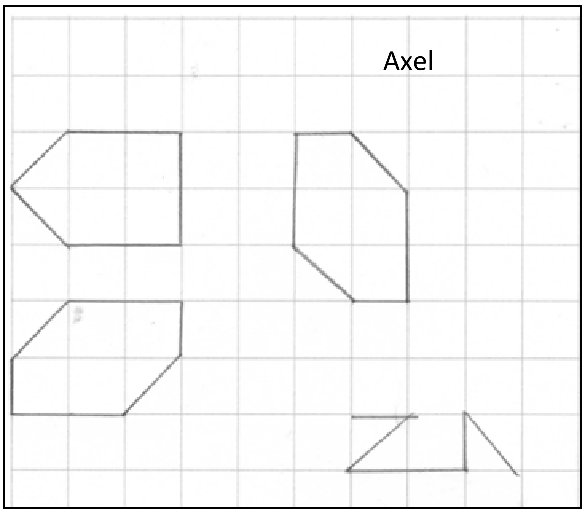
Voici l'énoncé d'un problème qui a été proposé dans le cadre du *rallye mathématique CM2-6ème de l'IREM Paris-Nord*.

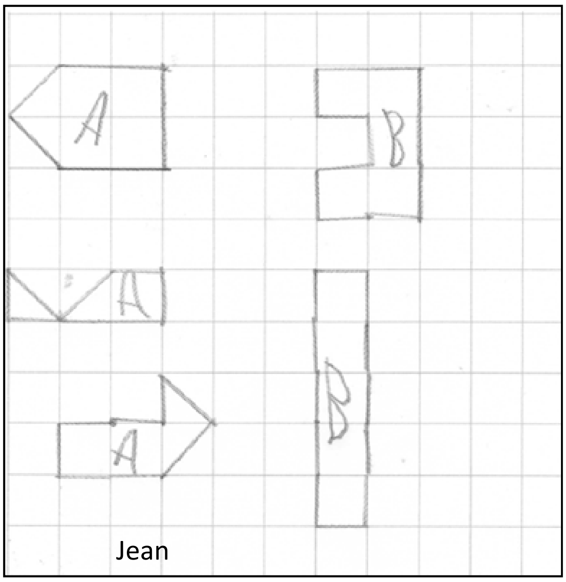
« Construire trois figures différentes dont les sommets sont des nœuds du quadrillage et qui à la fois ont même périmètre que la figure A et même aire que la figure B. »

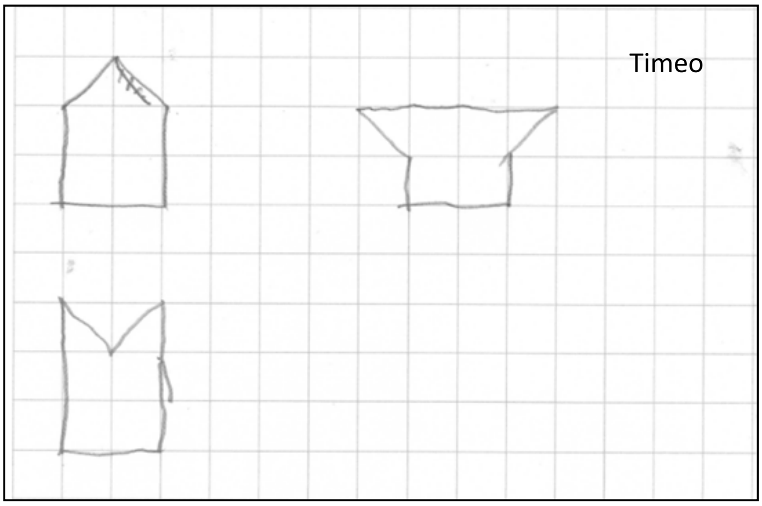


1. Citer trois compétences dans le domaine « grandeurs et mesures » qui permettent de construire les figures demandées.
2. L'enseignant a choisi d'utiliser du papier à quadrillage carré. Citer une difficulté qu'apporterait l'utilisation de papier pointé (à réseau carré).
3. Voici la production de trois élèves : Axel, Jean et Timeo.

4.







a. Production d'Axel :

Pour quelle raison le professeur a-t-il demandé à Axel de trouver une autre figure, après les trois premières dessinées ?

Proposer une explication possible au fait qu'Axel n'a pas terminé le quatrième tracé.

b. Production de Jean :

Analyser les réponses de Jean, en lien avec les objectifs de l'exercice.

c. Production de Timeo :

Analyser les réponses de Timeo, en lien avec les objectifs de l'exercice.

d. Proposer une aide possible que le maître pourrait apporter à Jean et à Timeo.